Vi kunde iterera
för att hitta egen-
vektorn $\bar{x}(\infty)$

Även för PageRank
används iteration
för att hitta egen-
vektorn.

dec 2-10:08

2 av 4

Från igår:

Tillämpningar av egenvektorer:

- Markovkedjor

$$\bar{X}(i+1) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \bar{X}(i)$$

det konvergerade mot en egenvektor $\bar{X}(\infty)$ med egenvärde 1.

- PageRank

$$r(W_i) = \sum_{j \mapsto i} \frac{r(W_j)}{N(W_j)}$$

dec 2-10:08

Varför finns egenvektor med egenvärde 1 ?

Matrisen var

Stokastisk

dvs $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 1 \quad \forall j$

och $0 \leq a_{ij} \leq 1$

dec 2-10:08

Då finns alltid egenvektor med egenvärde 1 eftersom

$$\det(A - I) = 0$$

dec 2-10:08

I matrisen

$A - I$

är kolonnsummorna noll, dvs summan av alla rader är noll.

dec 2-10:19

Vi kan se det som att

$$(1\ 1 \ldots 1)A = (1, \ldots, 1)$$

$\Longrightarrow$ det finns också en egenvektor med egenvärde 1 till höger.

dec 2-10:20

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1\cdot 2/3 + 1\cdot 1/3,\ 1\cdot 1/3 + 1\cdot 2/3\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Att multiplicera med $(1\ 1\ 1 \dots 1)$ innebär att ta summan av raderna.

dec 2-10:22

Vi kan se det som att $(1\,1 \ldots 1)^t$ är egenvektor till A^t med egenvärde 1.

alltid

A och A^t har samma egenvärden.

dec 2-10:23

$$\det(A - xI) =$$

$$\det\left((A - xI)^t\right)$$

$$= \det\left(A^t - xI\right)$$

dec 2-10:25

Baser

n st. linj. ober. vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar en bas för $\mathbb{R}^n$

Vi kan bygga upp alla andra vektorer med basvektorerna.

dec 2-10:27

Alla vektorer är linjärkombinationer av basvektorerna med koefficienter som är unikt bestämda.

dec 2-10:28

Exempel

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

linjärt oberoende i $\mathbb{R}^2$ eftersom

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix} = 1\cdot 3 - 1\cdot 2 = 1 \neq 0$$

dec 2-10:30

För en vektor

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ kan vi hitta

koefficienter x, y

så att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dec 2-10:31

dvs lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \swarrow \end{array}$$

Kan lösa med Gausselim.

dec 2-10:32

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

dec 2-10:33

Vi får en koordinatvektor

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

relativt basen

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

dec 2-10:35

Vi skriver

$$\bar{v} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_E$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

dec 2-10:36

Koordinatvektor-
erna är alltid
skrivna som element
i $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "GTF"] & \mathbb{R}^n \\ F & G \end{tikzcd}$$

dec 2-10:39

jämför med

$$x \longmapsto f(x)$$

Ex:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{{}_F T_E} \mathbb{R}^2$$

$$E \qquad\qquad F$$

Vad gör ${}_F T_E$ med en vektor $(a,b)^t$?

dec 2-10:41

Vi kan lösa det som förut

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & b \end{array}\right) \overset{-2}{} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-2a \end{array}\right) \overset{-1}{} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3a-b \\ 0 & 1 & b-2a \end{array}\right)$$

dec 2-10:43

Alltså

$$F_t^T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b \\ b-2a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

linjär avbildning.

dec 2-10:45

Vi får en matris som beskriver koordinattransformationen ${}_F T_E$. Vi kallar den ${}_F P_E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

dec 2-11:07

Den hjälper oss att omvandla från koordinater i standardbasen till koordinater i den nya basen F.

dec 2-11:08

Vi testar

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_E$$

$$_F P_E \, \bar{v}_E = \bar{v}_F$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}_F$$

dec 2-11:10

Kolonnerna i ${}_F P_E$ ska vara koordinatvektorerna för basvektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ relativt basen F.

Hur skriver vi

$$\bar{e}_1 = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2$$
$$= x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

dec 2-11:12

Det har kan ü j

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}_F$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_F$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

dec 2-11:14

Vi hade kunnat få ${}_F P_E$ genom att invertera

$${}_E P_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dvs med gausselim.

på

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dec 2-11:20

Basbyte vid linjär avbildning

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{}_F T_E"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "{}_G T_E"] \\
F\ \mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[r, bend left=80, red] & \mathbb{R}^n\ G
\end{tikzcd}
$$

$${}_G A_F = {}_G P_E \, A \, {}_E P_F$$

dec 2-11:25

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ger avbildning

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

genom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+3y-z \end{pmatrix}$$

dec 2-11:30

Vi har att

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

Alltså

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

dec 2-11:34

Vi kan välja

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vad blir

$$_E A_F \; ?$$

dec 2-11:38

Kolonnerna ska vara bilderna av

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

dvs:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

dec 2-11:40

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså

$$_{E}A_{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Välj nu

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$ som

dec 2-11:41

bas för $\mathbb{R}^2$.

Då blir

$${}_G A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Därför att

koordinaterna för

dec 2-11:43

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i basen G

är $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_G$

och

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_G$$

dec 2-11:44

Kolla att

$$ {}_G A_F = {}_G P_E \, A_E \, P_F $$

har sett tidigare.

och

$$ {}_E P_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} $$

dec 2-11:45